Norms of a vector

\[ \|x\|_1 = \sum |x_i| \quad \text{Sum of magnitudes} \]

\[ \|x\|_2 = \|x\|_e = \left( \sum x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{Euclidean norm} \]

\[ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{Maximum magnitude norm} \]

The Euclidean norm is the length of the vector in n-space.
**Norms of a matrix**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Formula</th>
<th>Description</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$|A|<em>1 = \max</em>{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n}</td>
<td>a_{i,j}</td>
</tr>
<tr>
<td>$|A|<em>\infty = \max</em>{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n}</td>
<td>a_{i,j}</td>
</tr>
<tr>
<td>$|A|_2 = \min \lambda_i$</td>
<td>Spectral norm (Eigen value)</td>
</tr>
<tr>
<td>$|A|<em>e = \left( \sum</em>{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$</td>
<td>Euclidean norm</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Properties of the Norms**

- $\|A\| > 0$
- $\|A\| = 0 \quad only \ if \ A = 0$
- $\|kA\| = |k|\|A\|$  
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
Condition number

Set of equations:

\[ Ax = b \]  
\[ Eq(1) \]

From norm properties:

\[ \|b\| \leq \|A\| \|x\| \]

Slightly change in \( b \):

\[ A(x + \delta x) = b + \delta b \]  
\[ Eq(2) \]

Subtraction Eq. (1) from Eq. (2), it becomes:

\[ A\delta x = \delta b \]

\[ or: \]

\[ \delta x = A^{-1}\delta b \]

\[ \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| \]

Multiplying both side to Eq. (1), yields:

\[ \|b\|\|\delta x\| \leq \|A\|\|x\|\|A^{-1}\|\|\delta b\| \]

Dividing both side to: \( \|b\|\|x\| \)

\[ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \]
Condition number

or:

\[
\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}
\]

Condition number of A:

\[
C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|
\]

Can be shown, perturbing A instead of b gives:

\[
\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq C(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}
\]

Mثال (نرم ماتریس)

با استفاده از نرم ماتریس سطحی (Maximum row sum) نرم ماتریس زیر را می‌پذیرد:

\[
A = \begin{bmatrix}
10 & -7 & 0 \\
-3 & 2.099 & 6 \\
5 & -1 & 5
\end{bmatrix}
\]

\[
\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|
\]

\[
= \max[(|10|+|-7|+|0|),(|-3|+|2.099|+|6|),(|5|+|-1|+|5|)]
\]

\[
= \max[(10+7+0),(3+2.099+6),(5+1+5)]
\]

\[
= \max(17,11.099,11)
\]

\[
= 17.
\]
مثال

(Condition No.)

بررسی رابطه (Condition) با نرم‌متریس

\[ Ax = b \]

\[ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix} \]

\[ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \]

\[ |x|_\infty = 2 \]

\[ |b|_\infty = 7.999 \]

جواب دستگاه:

مشاهده نماید که:

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان

مثال

(Condition No.)

با تغییر میان در سمت راست معادله (در بردار ثابت):

\[ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{bmatrix} \]

\[ x' = \begin{bmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{bmatrix} \]

تغییرات بردار ثابت و بردار جواب:

\[ \Delta b = b' - b = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{bmatrix} \]

\[ \Delta x = x' - x = \begin{bmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.999 \\ 3.000 \end{bmatrix} \]

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان
مثال (Condition No.)

\[
\|\Delta b\|_\infty = 0.001
\]
\[
\|\Delta x\|_\infty = 5.999
\]
\[
\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0.001}{7.999} = 1.250 \times 10^{-4}
\]
\[
\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{5.999}{2} = 2.9995
\]
\[
C(A) = \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|\Delta b\|_\infty} = \frac{2.9995}{1.250 \times 10^{-4}} = 23957
\]

عدد هالت (Condition Number)؛ به‌دنبال دستگاه است.

به‌طور دهنده ill – Condition

در مثال قبل با فرض تغییر کمی در ماتریس ضرایب A و ضعیف دستگاه معادلات را بررسی نمایید:

\[
A' = \begin{bmatrix} 1.001 & 2 \\ 2 & 3.998 \end{bmatrix}
\]
پایان بخش دوم از فصل اول